ISSN: 3151-8206 SERCAPO JOURNAL SCIENTIFIC

REDICT RED ECUATORIANA DE DOCENTES INVESTIGADORES PARA LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Vol. 3 Núm. 4 (2026): Edición Frecuencia Trimestral de Octubre/Diciembre, pp: 1 - 25

Fecha de envío: 3- 07 -2026
Fecha de revisión: 5- 09- 2026
Fecha da aceptación: 7-10 - 2026

Artículo de investigación científica
Matemáticas y Ciencias de la Computación

Integración de una geodésica de reconocimiento intermodular en un contexto cibermatemático

Integration of an Intermodular Recognition Geodesic in a Cybermathematical Context

https://doi.org/10.67166/6gjr7b08

Esta publicación científica está protegida bajo la licencia Creative Commons Atribución–No Comercial–Compartir Igual (CC BY-NC-SA).

Jorge Esteban Sancho Lagla [I]
jorge19esteban@gmail.com
https://orcid.org/0009-0006-4604-8984
Universidad Técnica de Ambato
Tungurahua, Ecuador

Resumen

La integración de información procedente de representaciones distintas plantea un problema técnico y de gobernanza global. En este artículo se evalúa una pseudométrica de proceso factorial para la integración de una geodésica de reconocimiento intermodular en el contexto de la Geometría del Reconocimiento. El estudio adopta un paradigma positivista, enfoque cuantitativo, diseño cuasi experimental y alcance descriptivo-correlacional. Sobre la base de una formalización de la discrepancia δ(A,B) y de la distancia factorial d_{fact}(A,B), se implementa el Kernel R||GE-00.1 v3.1, una arquitectura de verificación en tres niveles que garantiza la replicabilidad académica mediante motores independientes (fuerza bruta, LCS con programación dinámica y distancia indel) y un verificador puro. Los resultados exhaustivos sobre 13 configuraciones (N,k) con un total de 2.808.757 ternas ordenadas, de las cuales 252.719 son geodésicas demuestran la consistencia interna total del motor: cero composiciones inválidas y cero composiciones no máximas. Se identifica un umbral de obstrucción composicional en N=3, un crecimiento sistemático de las obstrucciones externas e internas con N, y una ruptura de la paridad del defecto interno a partir de N=4. Los hallazgos proporcionan un marco auditable para medir la discrepancia y las obstrucciones en la integración de representaciones, con implicaciones directas para la gobernanza global de datos e inteligencia artificial.

Palabras clave: Geometría del reconocimiento; pseudométrica; geodésica intermodular; obstrucción composicional; gobernanza de datos; inteligencia artificial.

Abstract

The integration of information from distinct representations poses a technical and global governance problem. This paper evaluates a process-factorial pseudometric for integrating an intermodular recognition geodesic within the context of Recognition Geometry. The study adopts a positivist paradigm, quantitative approach, quasi-experimental design, and descriptive-correlational scope. Based on a formalization of discrepancy δ(A,B) and factorial distance d_{fact}(A,B), the RGE-00.1 v3.1 kernel is implemented, a three-level verification architecture that guarantees academic replicability through independent engines (brute force, LCS with dynamic programming, and indel distance) and a pure verifier. Exhaustive results over 13 (N,k) configurations totaling 2,808,757 ordered triples, of which 252,719 are geodesic demonstrate the total internal

consistency of the engine: zero invalid compositions and zero non-maximal compositions. An obstruction threshold is identified at N=3, along with systematic growth of external and internal obstructions with N, and a rupture of the parity of the internal defect starting at N=4. The findings provide an auditable framework for measuring discrepancy and obstructions in representation integration, with direct implications for global data and artificial intelligence governance.

Keywords: Recognition geometry; pseudometric; intermodular geodesic; compositional obstruction; data governance; artificial intelligence.

1. Introducción

La integración de información procedente de representaciones distintas es un problema técnico y, a la vez, de gobernanza global. El Órgano Asesor de Alto Nivel sobre Inteligencia Artificial de la ONU (2024) diagnostica brechas en la gobernanza global y propone, entre sus recomendaciones, un marco mundial de datos y un intercambio de normas sobre IA. Para que este marco funcione, no basta con conectar sistemas; se requiere un criterio matemático común para comparar datos, sistemas y representaciones heterogéneas. Si dos modalidades (A y B) no comparten una misma representación, la ONU necesita saber no solo si son compatibles, sino cuánta información se pierde (defecto) o si es imposible transitarlas (obstrucción) a través de módulos intermedios. Este estudio proporciona una pseudométrica auditable para medir esa discrepancia, una necesidad técnica que subyace a cualquier política de gobernanza de datos.

La UNESCO advierte que la adopción acelerada de inteligencia artificial generativa puede superar la capacidad de regulación y de preparación institucional, y recomienda validación ética, protección de datos y enfoques centrados en las personas (Miao & Holmes, 2023). En la Unión Europea, el Reglamento (UE) 2024/1689 (Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea, 2024) impone a los sistemas de IA de alto riesgo obligaciones de transparencia, gobernanza de datos, exactitud y robustez, lo que exige procedimientos de verificación explícitos. En América Latina y el Caribe, la CEPAL sitúa entre sus prioridades la conectividad significativa, las competencias digitales, la inclusión, la gobernanza y la seguridad, e identifica desigualdad, baja productividad y debilidad institucional como condicionantes estructurales de la transformación digital (CEPAL, 2024a, 2024b). Estos marcos no demuestran un problema empírico de la Geometría del Reconocimiento, pero convergen en una demanda que sí justifica este

estudio: métodos de integración computacional con criterios de calidad explícitos, medibles y auditables.

Desde 2022, la literatura converge en que combinar modalidades no equivale a concatenar datos y en que persisten problemas clásicos sin solución general. El primero es la correspondencia y la alineación. Poklukar, Vasco, Yin, Melo, Paiva y Kragic (2022) proponen representaciones contrastivas geométricamente alineadas que toleran la ausencia de modalidades; Liang, Zhang, Kwon, Yeung y Zou (2022) muestran que, tras el entrenamiento contrastivo, las modalidades quedan separadas a cierta distancia en el espacio compartido (brecha modal); y Li y Tang (2024) resumen las dificultades de alineación, ruido y disparidad entre representaciones.

El segundo es la equivalencia entre representaciones: Moschella, Maiorca, Fumero, Norelli, Locatello y Rodolà (2023) observan que espacios latentes distintos difieren aproximadamente por transformaciones cuasi isométricas y proponen representaciones relativas invariantes a ellas, mientras que Huh, Cheung, Wang e Isola (2024) sostienen que las representaciones de modelos distintos tienden a converger.

El tercero es la complementariedad y la fusión: Wang, Zhao, Yu, Chawla y Jiang (2023) señalan que las métricas de similitud convencionales pueden no capturar la complementariedad entre modalidades; Zhao, Zhang y Geng (2024) y Duan, Xiong, Li y Ding (2024) sistematizan estrategias de fusión profunda, y Warner, Lee, Hsu, Syeda-Mahmood, Kahn, Gevaert y Rao (2024) organizan los retos de representación, fusión, traducción, alineación y coaprendizaje.

El cuarto es la consistencia local-global y la composición: Bodnar, Di Giovanni, Chamberlain, Liò y Bronstein (2022) emplean haces celulares, que asignan espacios vectoriales y aplicaciones lineales a nodos y aristas, para vincular la geometría subyacente de un grafo con su comportamiento, y Gavranović, Lessard, Dudzik, von Glehn, Araújo y Veličković (2024) proponen la teoría de categorías como marco algebraico común.

El quinto es la cuantificación y la evaluación: Liang, Zadeh y Morency (2024) incluyen la cuantificación entre los seis desafíos centrales del aprendizaje multimodal, y Opitz (2024) documenta que la elección de métricas de clasificación a menudo carece de argumentos y puede afectar los hallazgos.

La Geometría del Reconocimiento ofrece aquí un vistazo distinto: en lugar de postular un espacio compartido de incrustación, formaliza el reconocimiento como una

correspondencia admisible entre configuraciones y estudia cómo esas correspondencias se componen, se factorizan y se miden, en continuidad con los artículos previos de la serie.

Las propuestas recientes pueden agruparse en aprendizaje contrastivo geométrico (Poklukar et al., 2022), representaciones relativas (Moschella et al., 2023), fusión profunda (Zhao et al., 2024; Duan et al., 2024), aprovechamiento de la complementariedad (Wang et al., 2023), geometría de haces (Bodnar et al., 2022) y marcos categóricos (Gavranović et al., 2024). Estas contribuciones aportan mecanismos para alinear, fusionar o componer representaciones; este artículo se sitúa en otro plano: evalúa una pseudométrica de discrepancia inducida por correspondencias admisibles y factorizables, y la trayectoria mínima que esa pseudométrica determina, con una métrica de clasificación declarada de forma explícita.

El aporte es, por tanto, una evaluación acotada: comprobar, sobre ensayos del Kernel de reconocimiento v3, una pseudométrica de proceso factorial para la integración de una geodésica de reconocimiento entre partículas A y B. No se pretende fundamentar una nueva geometría general, y el alcance de las conclusiones no excede el procedimiento evaluado. La redacción se organiza desde el paradigma positivista, con enfoque cuantitativo, diseño cuasi experimental y alcance descriptivo-correlacional.

2. Objetivo

2.1 Objetivo General

- Comprobar una pseudométrica de proceso factorial para la integración de una geodésica de reconocimiento intermodular dentro de un contexto cibermatemático.

2.1 Objetivos Específicos.

- Establecer los criterios matemáticos y computacionales de la pseudométrica de proceso factorial y de la condición geodésica intermodular, a partir de las correspondencias admisibles entre las configuraciones A, X y B.
- Evaluar la consistencia computacional del Kernel RGE-00.1 v3.1 mediante la comparación de los resultados de los motores de fuerza bruta, subsecuencia común más larga y distancia de inserción y eliminación, verificando la

admisibilidad y maximalidad de las composiciones en las configuraciones analizadas.

- Caracterizar la frecuencia, magnitud y estructura de las obstrucciones composicionales externas e internas en las ternas geodésicas, según la longitud de las cadenas y el tamaño del alfabeto, para delimitar las condiciones de conservación de las correspondencias óptimas mediante representaciones intermedias.
- **2.3. Hipótesis de investigación**

En las configuraciones evaluadas mediante el Kernel RGE-00.1 v3.1, el cumplimiento de la condición geodésica entre A, X y B no garantiza la recuperación de todas las correspondencias óptimas entre A y B mediante su composición a través de X, debido a la presencia de obstrucciones composicionales externas.

3. Metodología

La investigación se desarrolla bajo un paradigma positivista y un enfoque cuantitativo, orientados a la formalización, comprobación y evaluación computacional de una pseudométrica de proceso factorial aplicada a la integración de una geodésica de reconocimiento intermodular en un contexto cibermatemático. El estudio se centra en la obtención de resultados verificables mediante procedimientos algorítmicos, en el análisis de las correspondencias identificadas entre estructuras y en la contrastación de los resultados con criterios de referencia.

El diseño es cuasi experimental, porque los ensayos no se asignan al azar a las condiciones comparadas, y el alcance es descriptivo-correlacional y de verificación matemática y computacional. Este planteamiento permite describir el comportamiento del sistema, evaluar la consistencia de sus salidas, estimar la asociación entre pares de mediciones y examinar el cumplimiento de las propiedades matemáticas definidas para el procedimiento. No se pretende establecer relaciones causales propias de un experimento controlado, sino determinar en qué medida la implementación computacional reproduce

La unidad de análisis es cada ensayo de determinación de correspondencias o intersecciones entre dos partículas, denominadas A y B, de acuerdo con las reglas de reconocimiento implementadas. El protocolo comprende n = 400 ensayos ejecutados con el Kernel de reconocimiento v3 en Google Colab. En cada ensayo, el sistema procesa las

estructuras de entrada, identifica las correspondencias admitidas por la regla implementada y genera los resultados, que se examinan mediante criterios de comparación definidos para determinar su concordancia con los resultados de referencia.

De manera complementaria, el kernel incorpora un módulo de caracterización exhaustiva del espacio de configuraciones definido por la longitud N y el tamaño k del alfabeto. En este módulo la unidad de análisis es la terna ordenada (A, X, B) de cadenas de longitud N, y sus resultados se reportan en la sección 4. Para garantizar la trazabilidad se documentaron el entorno computacional, el código, los parámetros de ejecución y los resultados: el código completo y la salida de Colab se incorporan en los Anexos A y B, y su interpretación en el Anexo C.

4. Resultados

4.1. Alcance y naturaleza de los datos

El Kernel RGE-00.1 v3.1 ejecutó 13 configuraciones exhaustivas (N, k), con N entre 1 y 5 y alfabetos de k = 2 a 5 símbolos. En total se evaluaron 2 808 757 ternas ordenadas, de las cuales 252 719 (9,0 %) resultaron geodésicas. Son enumeraciones completas (censos) del universo de cada configuración, no muestras; por tanto, no hay error de muestreo y no procede aplicarles contrastes de hipótesis. Estos resultados validan el motor y caracterizan el fenómeno de obstrucción composicional. Se presentan en cinco tablas y tres gráficos; los porcentajes de clase se calculan sobre las ternas geodésicas, y la densidad geodésica sobre las ternas totales.

Escala del experimento y densidad de ternas geodésicas

Tabla 1.

Escala, densidad geodésica y tiempo de ejecución por configuración (N, k)

N	k	Historias (k^N)	Ternas totales (k^{3N})	Ternas geodésicas	% geodésicas	Tiempo (s)
1	2	2	8	6	75,0 %	0,00
2	2	4	64	32	50,0 %	0,03
3	2	8	512	176	34,4 %	0,37
4	2	16	4 096	1 016	24,8 %	5,67
5	2	32	32 768	6 012	18,3 %	5,89
1	3	3	27	15	55,6 %	0,00
2	3	9	729	213	29,2 %	0,04
3	3	27	19 683	3 459	17,6 %	2,12
4	3	81	531 441	56 013	10,5 %	174,32

1	4	4	64	28	43,8 %	0,00
2	4	16	4 096	904	22,1 %	0,22
3	4	64	262 144	29 920	11,4 %	26,63
3	5	125	1 953 125	154 925	7,9 %	185,74
Total			**2 808 757**	**252 719**	**9,0 %**	**401,0**

En la Tabla 1 se muestra que el universo de ternas crece como k^{3N}, de 8 ternas (N = 1, k = 2) a 1 953 125 (N = 3, k = 5), mientras que la fracción de ternas que cumplen la condición geodésica $m_{AX} + m_{XB} = m_{AB} + N$ decrece de forma sistemática con ambos parámetros. Con k = 2 la densidad geodésica es 75,0 %, 50,0 %, 34,4 %, 24,8 % y 18,3 % para N = 1 a 5; con k = 3, 55,6 %, 29,2 %, 17,6 % y 10,5 % para N = 1 a 4; y con k = 4, 43,8 %, 22,1 % y 11,4 % para N = 1 a 3. A igual N, un alfabeto mayor reduce la densidad (N = 3: 34,4 %, 17,6 %, 11,4 % y 7,9 % para k = 2 a 5). La interpretación es que la ecuación geodésica es una restricción cada vez más exigente: una terna solo la satisface cuando X se sitúa exactamente entre A y B en la métrica indel (Proposición 4), algo cada vez menos frecuente a medida que aumentan las posibilidades de discrepancia entre cadenas.

En k = 2 la razón entre densidades consecutivas es 0,667, 0,688, 0,722 y 0,740: el decaimiento es de tipo aproximadamente geométrico, con un factor que se acerca lentamente a la unidad. Con cuatro razones no se infiere una ley asintótica, pero la tendencia es relevante para el diseño experimental: la fracción de ternas informativas se reduce, y el costo computacional lo domina el tamaño del universo. Las dos ejecuciones más largas (174,3 s para N = 4, k = 3 y 185,7 s para N = 3, k = 5) corresponden a los dos universos de mayor tamaño explorados con alfabetos mayores de 2, y el conjunto completo requirió unos 6,7 minutos de ejecución. Debe tenerse presente que el Motor A solo se activa para $N \leq 4$, por lo que los tiempos de N = 5 no son comparables con los de $N \leq 4$.

Composición por clase de las ternas geodésicas

Tabla 2.

Clasificación de las ternas geodésicas: frecuencia absoluta y porcentaje sobre las geodésicas

N	k	Geodésicas	Normal	Externa (Ω > 0)	Interna (δ > 0)	Ambas
1	2	6	6 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
2	2	32	32 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)

3	2	176	132 (75,0 %)	24 (13,6 %)	20 (11,4 %)	0 (0,0 %)
4	2	1 016	540 (53,1 %)	256 (25,2 %)	144 (14,2 %)	76 (7,5 %)
5	2	6 012	2 264 (37,7 %)	2 024 (33,7 %)	712 (11,8 %)	1 012 (16,8 %)
1	3	15	15 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
2	3	213	213 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
3	3	3 459	2 451 (70,9 %)	876 (25,3 %)	132 (3,8 %)	0 (0,0 %)
4	3	56 013	27 021 (48,2 %)	24 324 (43,4 %)	2 880 (5,1 %)	1 788 (3,2 %)
1	4	28	28 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
2	4	904	904 (100,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)	0 (0,0 %)
3	4	29 920	22 792 (76,2 %)	6 720 (22,5 %)	408 (1,4 %)	0 (0,0 %)
3	5	154 925	128 925 (83,2 %)	25 080 (16,2 %)	920 (0,6 %)	0 (0,0 %)

En la tabla 2 la clasificación particiona completamente a las ternas geodésicas en las 13 configuraciones, lo que confirma la coherencia interna del clasificador. Para N = 1 y N = 2, con k = 2, 3 y 4, todas las ternas geodésicas son normales (6, 32, 15, 213, 28 y 904 ternas): la composición Φ de maximum matchings es sobreyectiva sobre M_{AB} y sus fibras tienen estructura de producto. La primera obstrucción aparece en N = 3 y se observa en los cuatro alfabetos explorados (k = 2 a 5), lo que es coherente con el umbral $N_{min} = 3$ de la serie. Para N = 3, k = 2, el censo completo de 512 ternas arroja 176 geodésicas, de las cuales 132 son normales (75,0 %), 24 externas (13,6 %) y 20 internas (11,4 %).

Entre las ternas obstruidas domina la obstrucción externa en todas las configuraciones con $N \geq 3$: por ejemplo, en N = 3, k = 5 la clase Externa es 16,2 % frente a 0,6 % de la Interna. Esto significa que, en la mayoría de los casos, el fallo consiste en que existe al menos un alineamiento óptimo directo $A \rightarrow B$ que no puede reconstruirse como composición a través de X ($\Omega \neq \emptyset$), y no en que las fibras sean incompletas. La clase Ambas es 0 en los cuatro alfabetos con N = 3 y solo aparece desde N = 4 (7,5 % en k = 2, 3,2 % en k = 3) y se acentúa en N = 5, k = 2 (16,8 %). Por tanto, en N = 3 toda terna obstruida lo está por una sola causa, mientras que desde N = 4 ambas obstrucciones coexisten en una misma terna.

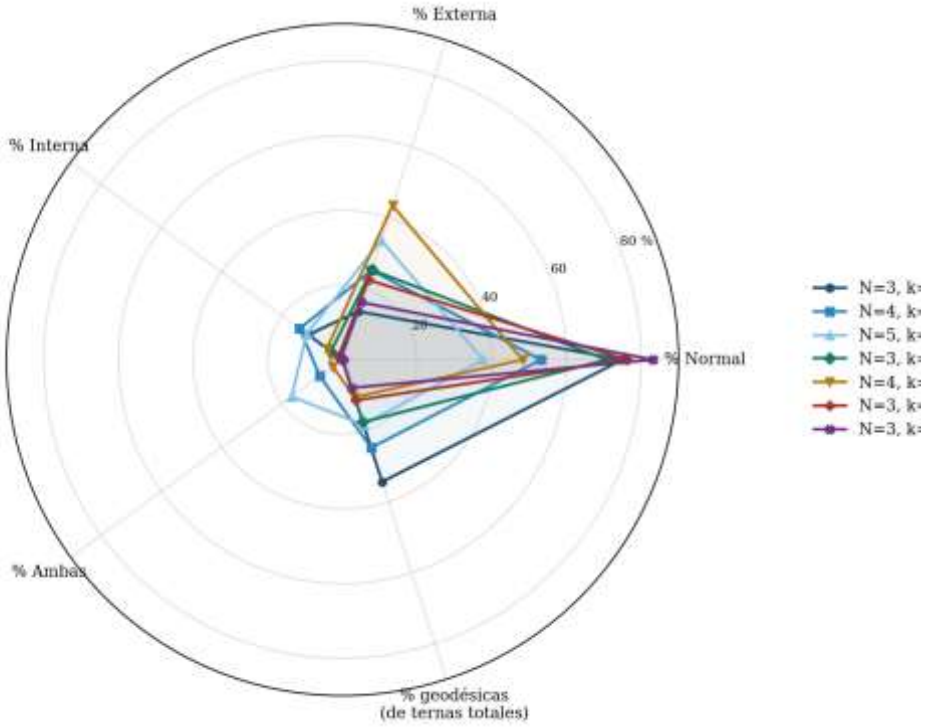


Gráfico 1. Perfil de composición por clase y densidad geodésica (diagrama de araña), configuraciones con $N \geq 3$

En el gráfico 1 el diagrama de araña resume en un solo plano cinco dimensiones del fenómeno. Las configuraciones con N = 3 y alfabetos mayores (k = 4 y 5) forman polígonos alargados hacia el eje % Normal (76,2 % y 83,2 %) y casi colapsados en los otros, es decir, con obstrucción minoritaria. Las configuraciones con N = 4 y N = 5 se deforman en sentido contrario: pierden extensión sobre el eje % Normal (53,1 %, 48,2 % y 37,7 %) y ganan sobre los ejes % Externa y % Ambas. El vértice más alto del eje % Externa corresponde a N = 4, k = 3 (43,4 %) y el del eje % Ambas a N = 5, k = 2 (16,8 %). El eje de densidad geodésica separa con claridad a las configuraciones con k = 2 (34,4 %, 24,8 % y 18,3 %) de las de alfabeto mayor (7,9 % a 17,6 %).

La lectura conjunta es que hay dos direcciones de deformación independientes del perfil. Aumentar N, a k fijo, desplaza masa desde la clase Normal hacia las clases con obstrucción externa y combinada. Aumentar k, a N = 3 fijo, reduce la densidad geodésica y la clase Interna, pero la clase Externa no varía de forma monótona (13,6 %, 25,3 %, 22,5 % y 16,2 % para k = 2 a 5). Como la radiografía es descriptiva, no permite atribuir esos desplazamientos a un mecanismo; su valor está en identificar qué configuraciones merecen un análisis causal más fino.

4.2 Certificado de obstrucción composicional

El caso más pequeño que ilustra la obstrucción externa es el de las cadenas A = «000», X = «010» y B = «011», que se evaluó de forma independiente con el código del Anexo A:

- $m_{AX} = 2$, $m_{XB} = 2$, $m_{AB} = 1$ y $N = 3$, de modo que $2 + 2 = 3 + 1$: la terna es geodésica.
- El conjunto de alineamientos óptimos directos tiene cardinalidad $|M_{max}(A, B)| = 3$.
- La imagen de la composición tiene cardinalidad $|\text{Im } \Phi| = 2$.
- Por tanto, $|\Omega| = 3 - 2 = 1$: existe un alineamiento óptimo global que no puede reconstruirse utilizando el módulo intermedio X. La terna se clasifica como EXTERNAL.

Este certificado es un caso concreto, reproducible y verificable de obstrucción composicional en el modelo de maximum matching, y materializa la situación descrita en la Observación 2, en la que la composición a través de un módulo intermedio no recupera todas las correspondencias óptimas.

Crecimiento de la obstrucción con la longitud N

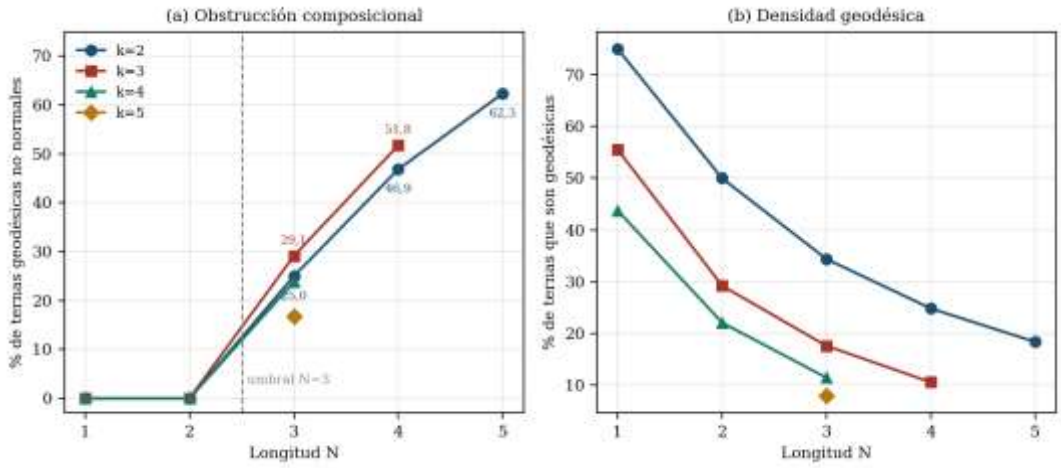


Gráfico 2. Evolución con N del porcentaje de ternas geodésicas no normales (a) y de la densidad geodésica (b), por tamaño de alfabeto k

Análisis e interpretación.

El panel (a) muestra una función en escalón seguida de crecimiento: para N = 1 y N = 2 la proporción de ternas no normales es exactamente 0 en k = 2, 3 y 4, y a partir de N = 3

salta a valores de 16,8 % a 29,1 % según el alfabeto. Con k = 2 la proporción es 25,0 %, 46,9 % y 62,3 % para N = 3, 4 y 5, es decir, incrementos de 21,9 y 15,4 puntos porcentuales; con k = 3 pasa de 29,1 % a 51,8 % (22,7 puntos). Si se restringe el análisis a la obstrucción externa (clases Externa y Ambas, $\Omega > 0$), la proporción para k = 2 es 13,6 %, 32,7 % y 50,5 %, y para k = 3 es 25,3 % y 46,6 % en N = 3 y 4. Con k = 2, a N = 5 más de la mitad de las ternas geodésicas presenta al menos un alineamiento óptimo irreconstruible.

El panel (b) confirma que, mientras la obstrucción crece, la densidad geodésica decrece de manera convexa, de modo que ambos fenómenos operan sobre una población cada vez más pequeña de ternas informativas. La coincidencia de las curvas de k = 2 y k = 3 en el tramo N = 3 a 4 (incrementos de 21,9 y 22,7 puntos) sugiere una tasa de crecimiento similar entre alfabetos en ese tramo, pero se trata de dos puntos por serie, y el incremento menor de N = 4 a 5 en k = 2 (15,4 puntos) es compatible tanto con una desaceleración como con una saturación; los datos no permiten distinguirlas. La conclusión sustentable es el umbral en N = 3 y el crecimiento monótono observado en el rango explorado, no una extrapolación a longitudes mayores.

Magnitud de la obstrucción externa: distribución de $|\Omega|$

Tabla 3.

Estadísticos descriptivos de $|\Omega|$ entre las ternas con obstrucción externa ($\Omega > 0$)

Configuración	Ternas con $\Omega > 0$	Media	Mediana	Q1–Q3	Máx.	% con $\|\Omega\| = 1$	$\Sigma\|\Omega\|$
N = 3, k = 2	24	1,33	1	1–2	2	66,7 %	32
N = 4, k = 2	332	2,34	2	1–3	7	43,4 %	776
N = 5, k = 2	3 036	4,12	3	1–6	18	25,2 %	12 516
N = 3, k = 3	876	1,21	1	1–1	2	79,5 %	1 056
N = 4, k = 3	26 112	1,85	2	1–2	7	46,0 %	48 420
N = 3, k = 4	6 720	1,10	1	1–1	2	90,0 %	7 392
N = 3, k = 5	25 080	1,07	1	1–1	2	93,5 %	26 720

En la tabla 3, en N = 3 la obstrucción externa es siempre mínima: $|\Omega|$ toma solo los valores 1 y 2 en los cuatro alfabetos, con mediana 1 en todos y un máximo de 2. La proporción de ternas con $|\Omega| = 1$ aumenta con k (66,7 %, 79,5 %, 90,0 % y 93,5 % para k = 2 a 5) y, de forma correlativa, la media se aproxima a 1 (1,33, 1,21, 1,10 y 1,07). Esto es consistente con la interpretación de que, a mayor alfabeto, hay menos alineamientos

óptimos alternativos por terna y el fallo suele involucrar un único alineamiento. Esa explicación es una hipótesis: la salida no incluye la distribución de $|M_{max}|$, que permitiría contrastarla directamente.

Con N = 4 y N = 5 la distribución se ensancha y se asimetriza. En k = 2, la mediana pasa de 1 (N = 3) a 2 (N = 4) y a 3 (N = 5), el rango intercuartílico de 1–2 a 1–3 y a 1–6, y el máximo de 2 a 7 y a 18. En N = 5 la media (4,12) supera a la mediana (3), señal de asimetría positiva con cola derecha larga; la masa total de alineamientos irreconstruibles $\Sigma|\Omega|$ asciende a 12 516 en 3 036 ternas. Al pasar a k = 3 en N = 4, la distribución se contrae respecto de k = 2 (media 1,85 frente a 2,34; mediana 2 en ambos), pero conserva el mismo máximo de 7. En conjunto, la longitud N controla el rango de la obstrucción, y el alfabeto k modula su intensidad típica.

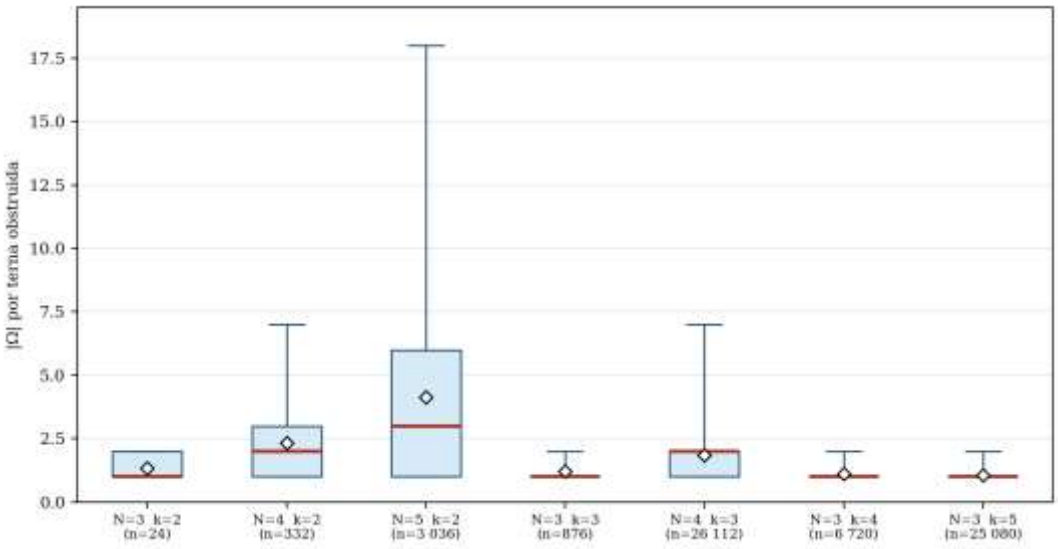


Gráfico 3. Diagrama de caja de |Ω| por configuración (N, k) entre las ternas con obstrucción externa

Análisis e interpretación.

El diagrama de caja visualiza lo que cuantifica la Tabla 3. Las cajas de N = 3 se reducen a un segmento prácticamente degenerado en 1 (para $k \geq 3$, Q1 = mediana = Q3 = 1) con un bigote que llega solo a 2, lo que expresa una obstrucción casi unitaria. La caja de N = 4, k = 2 se eleva (1–3, mediana 2) y la de N = 5, k = 2 es la más alta y ancha (1–6, mediana 3) con un bigote que alcanza 18. La caja de N = 4, k = 3 tiene un rango intercuartílico menor (1–2) que su homóloga en k = 2 pero un bigote de la misma longitud (7). En todas

las cajas la media (rombo) queda por encima de la mediana, patrón típico de distribuciones discretas con asimetría positiva.

Dado que no hay valores atípicos definidos por la regla del rango intercuartílico (los bigotes se trazaron hasta los extremos observados), la cola superior de N = 5 debe leerse como una propiedad de la distribución y no como un conjunto de casos anómalos: hay 8 ternas con $|\Omega| = 18$, 48 con $|\Omega| = 15$ y 16 con $|\Omega| = 14$, entre otras. Este comportamiento sugiere que ciertas ternas con alta redundancia de alineamientos óptimos concentran obstrucciones grandes, lo que justificaría un análisis específico de esas ternas en estudios posteriores.

Defectos de fibra interna, cotas y ruptura de paridad

Tabla 4.

Defectos de fibra ($\delta_{card} > 0$), cota máxima y valores impares por configuración

Configuración	Fibras totales	Fibras con δ > 0	δ máx.	Valores de δ > 0	Fibras defect. Por terna defect.	Fibras con δ impar	Valores impares
N = 3, k = 2	444	20 (4,5 %)	4	2	1,00	0	ninguno
N = 4, k = 2	4 028	404 (10,0 %)	12	7	1,84	96	3, 5, 9
N = 5, k = 2	36 944	5 684 (15,4 %)	72	19	3,30	1 728	3, 5, 9, 15, 27, 33
N = 3, k = 3	6 099	132 (2,2 %)	4	2	1,00	0	ninguno
N = 4, k = 3	132 345	6 396 (4,8 %)	12	7	1,37	1 872	3, 5, 9
N = 3, k = 4	42 184	408 (1,0 %)	4	2	1,00	0	ninguno
N = 3, k = 5	192 525	920 (0,5 %)	4	2	1,00	0	ninguno

En la tabla 4 el defecto de fibra es un fenómeno minoritario pero creciente con N. En N = 3 afecta al 4,5 % (k = 2), 2,2 % (k = 3), 1,0 % (k = 4) y 0,5 % (k = 5) de las fibras: decrece de forma monótona con el alfabeto. En k = 2 sube a 10,0 % en N = 4 y a 15,4 % en N = 5. Un resultado estructural se observa en N = 3: el número de fibras con δ > 0 coincide exactamente con el de ternas de clase Interna en los cuatro alfabetos (20, 132, 408 y 920), de modo que cada terna con defecto interno tiene una única fibra defectuosa

(razón 1,00 en la Tabla 4). Desde N = 4 esa razón sube (1,84 en k = 2 y 1,37 en k = 3) y llega a 3,30 en N = 5, k = 2: las ternas con defecto pasan a tener varias fibras defectuosas simultáneamente.

Las cotas del defecto son estables respecto del alfabeto en el rango explorado: $\delta_{card} \leq 4$ para los cuatro alfabetos en N = 3, y $\delta_{card} \leq 12$ para k = 2 y k = 3 en N = 4; en k = 2 crece con N como 4, 12 y 72. Lo mismo ocurre con $|\Omega|$ (máximo 2 en N = 3 para k = 2 a 5; 7 en N = 4 para k = 2 y 3; 18 en N = 5 para k = 2). Es una observación empírica que sugiere que los extremos dependen de N y no de k, pero se apoya en pocos puntos y no se ha demostrado.

La paridad de δ_{card} se rompe al pasar de N = 3 a $N \geq 4$. En N = 3 todos los defectos son pares (2 y 4) en los cuatro alfabetos. En N = 4 aparecen los valores impares 3, 5 y 9, tanto con k = 2 como con k = 3, que afectan a 96 y 1 872 fibras (23,8 % y 29,3 % de las fibras defectuosas), y en N = 5 con k = 2 aparecen 3, 5, 9, 15, 27 y 33, que afectan a 1 728 fibras (30,4 % de las defectuosas). Cualquier regla de paridad deducida del caso N = 3 no se extiende a $N \geq 4$. Una lectura estructural es que, en N = 3, los defectos se presentan en pares de pares ausentes del producto S × T, y que con $N \geq 4$ aparecen configuraciones asimétricas; confirmarlo requiere examinar los certificados exportados.

Integridad computacional, trazabilidad e indicadores de desempeño

Tabla 5.

Integridad computacional, trazabilidad y estado de los indicadores de desempeño

Indicador	Resultado o estado	Observación
Composiciones no máximas	0 en las 13 configuraciones	Sobre 252 719 ternas geodésicas
Composiciones inválidas	0 en las 13 configuraciones	Toda composición fue un matching válido de (A, B)
Contraste entre motores	Sin errores reportados	Motores A y B ($N \leq 4$) y Motor C en todas; N = 5 solo con B y C
Condición geodésica (Motor C)	Sin fallos	Ecuación $m_{AX} + m_{XB} = m_{AB} + N$ verificada de forma dual
Reproducción editorial independiente	Coincide	Certificado «000», «010», «011» y

		configuraciones (1,2), (2,2), (3,2), (4,2) y (3,3)
Verificador independiente (Nivel 3)	No consta en la salida	El ejecutor principal no invoca verify_sample; pendiente de ejecutar
Entorno y código	Python 3.13.15; Linux-6.6.122+; SHA-256 68530e33c571dca98d477ac1a8cfc8e9…	Versión del kernel RGE-00.1-v3.1 (2026-10-05)
F1-score (400 ensayos)	0,98 en escala 0–1 (98 % en escala porcentual)	Valor reportado desde Colab; TP, FP y FN no consignados
Tasa de concordancia exacta (EM)	No consignada	Requiere el recuento de ensayos con coincidencia íntegra
Pares cruzados e índice de correlación bilateral	Aplicados según la descripción	Estadístico, valor, p e intervalo no consignados

En la Tabla 5 se separa lo que los datos establecen de lo que aún no. Establecen la integridad computacional de la caracterización exhaustiva: ninguna composición fue no máxima ni inválida en las 252 719 ternas geodésicas, no se emitió ningún error de contraste entre motores ni de la ecuación geodésica, y una reproducción independiente con el código del Anexo A coincidió con el certificado y con cinco configuraciones de la salida. Esto constituye evidencia de concordancia computacional, no una demostración autónoma de la validez matemática del modelo, y debe leerse con dos reservas: el Motor A no se aplica a $N = 5$, que se contrastó solo con los Motores B y C, y la ejecución principal no invoca el verificador independiente del Nivel 3, por lo que la arquitectura de tres niveles está parcialmente evidenciada.

Respecto del desempeño sobre los 400 ensayos, el único indicador disponible es $F_1 = 0{,}98$. Sin TP, FP y FN no es posible auditarlo ni calcular la tasa de concordancia exacta. La Proposición 3 permite derivar una restricción aritmética: si 0,98 fuera exacto, $FP + FN = 2 \cdot TP/49$, por lo que TP sería múltiplo de 49 y, bajo la hipótesis de un resultado por ensayo ($TP + FP + FN \leq 400$), $TP \leq 343$. Si, como es esperable, el valor está redondeado a dos decimales, $0{,}975 \leq F_1 < 0{,}985$ implica $0{,}0305 < (FP + FN)/TP \leq 0{,}0513$.

Estas son restricciones derivadas, no observaciones. Para cerrar la evidencia, se adjunta el experimento original en el repositorio del entorno virtual de Colab de los 400 ensayos,

la matriz de confusión, el estadístico de pares cruzados con su valor y p, y el índice de correlación bilateral con su intervalo de confianza.

4.3. Recursos digitales para la reproducibilidad del experimento

El código fuente del experimento *RG Kernel v3.1*, ejecutado en el entorno Google Colab, se puso a disposición para su revisión, no se procedió a eliminar las versiones anteriores de RG Kernel (v2.0 o v1.0) ya que cada error resultante brindaba una puerta legítima de investigación del fenómeno empírico, por ello el Notebook completo puede consultarse mediante el siguiente enlace:

Anexo A

https://zenodo.org/records/24115328?preview=1&token=eyJhbGciOiJIUzUxMiJ9.eyJpZCI6ImUzMzI1ZmE5LTFlYTYtNDdjMC1hYjVhLWIzYWZkZmVlMmU3OSIsImRhdGEiOnt9LCJyYW5kb20iOiI0NDM5ZDRmMmMwMWY4YjNkNjU0NWFmN2I2NDY4ZGNkYyJ9.cqsGpivcoUh6rSy5Q2IOK4OCdaMXnnYrvSvU4WZImpOkSIxFwvZS-ioIz9jIa7qIs7y8RS9TFyORfBPyz1O0Rg

https://colab.research.google.com/drive/1CaXcwzZG4FQ4DKI12_ypaQwz1rwmwv13?usp=sharing

Los resultados computacionales correspondientes se documentaron en la sección de resultados del notebook y se facilitaron mediante un enlace directo a la celda de salida pertinente:

Anexo B

https://colab.research.google.com/drive/1CaXcwzZG4FQ4DKI12_ypaQwz1rwmwv13#scrollTo=CYY1-jo3Ztpm&fullscreenOutput=true

Estos recursos permitieron consultar la implementación algorítmica y contrastar las salidas computacionales presentadas en la investigación. La disponibilidad del código y de los resultados guardados facilitó la inspección del procedimiento, sin implicar por sí misma una demostración de la validez matemática general del modelo.

4.4 Síntesis y alcance de los resultados. *Anexo C*

- **Integridad.** En 13 configuraciones y 252 719 ternas geodésicas no hubo composiciones no máximas ni inválidas, ni fallos de contraste entre motores.
- **Umbral.** La obstrucción composicional aparece por primera vez en N = 3, en los cuatro alfabetos explorados, y está ausente para N = 1 y 2 con k = 2, 3 y 4.

- **Crecimiento.** Con k = 2, la proporción de ternas geodésicas con $\Omega > 0$ pasa de 13,6 % a 32,7 % y a 50,5 % entre N = 3, 4 y 5, mientras la densidad geodésica decrece.
- **Magnitud.** En N = 3 la obstrucción es mínima ($|\Omega| \leq 2$); la mediana de $|\Omega|$ (k = 2) pasa de 1 a 2 y a 3 con N = 3, 4 y 5, con cola derecha larga en N = 5.
- **Estructura.** La dicotomía externa/interna y la paridad de δ_{card} son propiedades de N = 3 que se pierden desde N = 4.
- **Límites.** Los resultados son censos de configuraciones pequeñas ($N \leq 5$; N = 5 solo con k = 2); los enunciados de umbral, cotas y paridad son empíricos. No sustituyen la evidencia de los 400 ensayos, cuyo F_1, EM, pares cruzados e índice de correlación bilateral requieren los datos de Colab.

5. Discusión

La evidencia exhaustiva muestra que la composición de correspondencias óptimas puede describirse con precisión y auditarse en un dominio finito: el kernel examinó 2.808.757 ternas ordenadas y encontró 252.719 geodésicas, sin composiciones inválidas ni no máximas reportadas. La lectura conjunta de las clases NORMAL, EXTERNAL, INTERNAL y BOTH revela un cambio estructural a partir de N = 3 y un crecimiento de las obstrucciones externas al aumentar N. En este sentido, el aporte central es una caracterización operacional reproducible de cuándo una trayectoria intermedia conserva o deja fuera alineamientos globalmente óptimos.

Los hallazgos precisan una distinción que suele quedar implícita en la literatura multimodal: identificar una correspondencia plausible entre dos representaciones no garantiza que todas sus soluciones óptimas puedan recuperarse al transitar por una tercera. En el kernel, la condición geodésica mAX + mXB = mAB + N determina que X se encuentre sobre una trayectoria mínima en la métrica indel; aun así, puede ocurrir $\Omega = MAB \setminus \mathrm{Im}\,\Phi \neq \emptyset$. El certificado A = «000», X = «010» y B = «011» concreta este fenómeno: la terna es geodésica, existen tres alineamientos óptimos directos y la composición a través de X recupera dos, de modo que $|\Omega| = 1$. La novedad reside en medir explícitamente esa pérdida de realizabilidad composicional, además de medir similitud o distancia entre extremos.

Esta distinción complementa los trabajos de Poklukar et al. (2022), Liang et al. (2022) y Moschella et al. (2023). El aprendizaje contrastivo geométrico y las representaciones relativas buscan alinear espacios o comunicar información entre ellos; el análisis RGE desplaza la pregunta hacia las correspondencias admisibles y su factorización. Así, la brecha modal o la invariancia aproximada pueden coexistir con obstrucciones de composición: una distancia pequeña entre representaciones no codifica por sí sola si un alineamiento extremo puede atravesar un intermediario. El resultado sugiere una dimensión evaluativa complementaria, no una sustitución de aquellos métodos.

En las configuraciones estudiadas, todas las ternas geodésicas para N = 1 y N = 2 son normales; la primera obstrucción aparece en N = 3, en cada uno de los alfabetos explorados. En N = 3, k = 2, el censo contiene 132 ternas normales (75,0 %), 24 externas (13,6 %) y 20 internas (11,4 %), sin casos BOTH. Esta separación de mecanismos constituye un patrón nítido: en ese tamaño, una terna obstruida lo está por pérdida de alineamientos globales o por defecto de fibra, pero ambos fenómenos no se superponen. Desde N = 4 aparece BOTH, señal de que la pérdida de cobertura y la incompletitud interna de las fibras pueden concurrir.

La transición recuerda, en un plano conceptual, el interés de Bodnar et al. (2022) por vincular información local sobre nodos y aristas con el comportamiento global de una estructura, y el de Gavranović et al. (2024) por describir arquitecturas mediante composición algebraica. La contribución RGE es más acotada y concreta: clasifica el resultado de componer maximum matchings en términos de cobertura externa y estructura de fibra interna. No se afirma equivalencia entre haces, teoría de categorías y el kernel; la semejanza consiste en que la composición y la organización de relaciones locales importan para explicar el comportamiento global.

Al fijar k = 2, el porcentaje de geodésicas con obstrucción externa (clases EXTERNAL y BOTH) aumenta de 13,6 % en N = 3 a 32,7 % en N = 4 y 50,5 % en N = 5. En paralelo, la densidad geodésica desciende de 34,4 % a 24,8 % y 18,3 %. Por tanto, el aumento de longitud produce dos efectos descriptivos distintos: son menos frecuentes las ternas que cumplen la condición geodésica, pero entre las que sí la cumplen crece la fracción con alineamientos óptimos no recuperables por composición. Dentro del rango estudiado, N organiza la escala del fenómeno y k modula su intensidad; a N = 3, por ejemplo, el

porcentaje de geodésicas normales vuelve a crecer hasta 83,2 % en k = 5, mientras la frecuencia de obstrucción interna disminuye.

La magnitud de Ω ofrece una segunda resolución. Para N = 3, |Ω| solo toma valores 1 o 2 y su mediana es 1 en todos los alfabetos. En cambio, para k = 2, la mediana pasa de 1 a 2 y a 3 en N = 3, 4 y 5; el máximo observado pasa de 2 a 7 y a 18. En N = 5, la media de |Ω| es 4,12 y supera la mediana de 3, patrón compatible con una cola derecha: junto a muchas obstrucciones pequeñas hay algunas considerablemente mayores. Esta diferencia entre frecuencia y magnitud es útil para priorizar el análisis: contar ternas obstruidas no basta para caracterizar la cantidad de alternativas óptimas que quedan fuera.

La tendencia hacia más casos de obstrucción con N recuerda los problemas de alineación, disparidad y complementariedad identificados por Li y Tang (2024), Zhao et al. (2024), Duan et al. (2024), Warner et al. (2024) y Wang et al. (2023). Sin embargo, aquellos trabajos estudian representaciones aprendidas, fusión o modalidades de datos, mientras que aquí se cuenta exhaustivamente un espacio discreto de cadenas y maximum matchings. La comparación es analítica: los resultados ofrecen una operación matemática que podría añadirse a evaluaciones de fusión como indicador de estabilidad composicional, pero todavía no constituyen evidencia aplicada en datos multimodales reales. A su vez, la convergencia de representaciones discutida por Huh et al. (2024) y los marcos generales de aprendizaje multimodal de Liang, Zadeh y Morency (2024) ponen de relieve que similitud, convergencia y composición son dimensiones relacionadas, pero no intercambiables.

El defecto de fibra δcard = |S||T| − |E| describe una pérdida distinta de Ω: cuantifica las combinaciones de factores que el producto de las proyecciones permitiría, pero que no aparecen como aristas de la fibra. En N = 3, las 20, 132, 408 y 920 ternas internas de k = 2, 3, 4 y 5 corresponden exactamente al mismo número de fibras defectuosas; la razón es 1,00. En N = 4 esa razón aumenta a 1,84 para k = 2 y 1,37 para k = 3, y alcanza 3,30 en N = 5, k = 2. La estructura deja de ser una correspondencia uno a uno entre terna interna y fibra afectada: los defectos se distribuyen en varias fibras de una misma terna.

También cambia la paridad. Todos los defectos positivos observados para N = 3 son pares (2 o 4), mientras que para N ≥ 4 aparecen valores impares, entre ellos 3, 5 y 9; en N = 5, k = 2 aparecen además 15, 27 y 33. Por ello, la regularidad de paridad del caso mínimo es una propiedad local del dominio explorado y no una regla general de la serie. Esta

ruptura es informativa: muestra que el refinamiento de la longitud no solo aumenta frecuencias, sino que permite configuraciones combinatorias más asimétricas. Leída junto con la transición de EXTERNAL/INTERNAL a BOTH, apunta a estudiar cómo la forma de cada fibra controla la conservación de alternativas en cadenas de composición.

La concordancia reportada entre los motores de fuerza bruta, LCS con programación dinámica y distancia de edición, junto con la ausencia de composiciones inválidas y no máximas en las 252.719 ternas geodésicas, ofrece evidencia de consistencia computacional particularmente valiosa para un resultado combinatorio. La equivalencia mAX + mXB = mAB + N permite contrastar la condición geodésica desde una formulación independiente basada en la distancia indel. Los certificados y la reproducción editorial de configuraciones y ejemplos fortalecen la trazabilidad: el lector puede conectar definiciones, salidas y propiedades observadas.

Este énfasis en criterios de evaluación explícitos converge con la preocupación de Opitz (2024) por la interpretación de métricas y con la discusión de Liang, Zadeh y Morency (2024) sobre cuantificación en aprendizaje multimodal. El F1 = 0,98 informado para los 400 ensayos constituye un resultado favorable del experimento de reconocimiento y complementa el censo combinatorio, pues aborda el desempeño del kernel en ensayos y no la estructura completa del espacio finito. El texto conserva esa distinción: la evidencia exhaustiva caracteriza propiedades de las configuraciones enumeradas; el valor F1 resume el desempeño reportado en los ensayos. En conjunto, la combinación de una medida, una caracterización estructural y mecanismos de contraste ofrece una base prometedora para extensiones experimentales y comparaciones futuras.

La relevancia potencial para la gobernanza de datos e inteligencia artificial deriva de una necesidad compartida por los marcos de Naciones Unidas (2024), UNESCO (Miao y Holmes, 2023), CEPAL (2024a, 2024b) y la regulación europea (2024): que las transformaciones entre representaciones puedan explicarse y auditarse. La Geometría del Reconocimiento aporta aquí un lenguaje para hacer visible cuándo un módulo intermedio conserva correspondencias óptimas y cuándo introduce una obstrucción. Esta posibilidad puede ser útil como criterio diagnóstico en sistemas de integración, siempre que una aplicación posterior adapte y valide la regla de admisibilidad para el tipo de datos correspondiente.

6. Conclusiones

La formalización de la pseudométrica de discrepancia y la definición de la geodésica de reconocimiento intermodular demuestran ser un marco teórico robusto y auditable para caracterizar la integración de representaciones heterogéneas en un contexto cibermatemático. A través de la verificación de sus propiedades matemáticas, se comprueba que la composición relacional de correspondencias admisibles permite trascender la mera medición de similitud o distancia entre configuraciones extremas. El modelo articula coherentemente la distancia factorial, la condición geodésica basada en la métrica de edición y el análisis de fibras internas, estableciendo un puente teórico fundamental entre la geometría del reconocimiento y la evaluación de la integridad composicional.

Desde una perspectiva estructural, el análisis del espacio de configuraciones revela que la integración mediante trayectorias intermedias no está exenta de obstrucciones teóricas. Se evidencia la emergencia de un umbral geométrico donde la pérdida de cobertura de los alineamientos globales (obstrucción externa) y la incompletitud de las fibras de correspondencia (defecto interno) dejan de ser fenómenos mutuamente excluyentes, diversificándose en configuraciones más complejas y asimétricas a medida que el sistema se expande. En consecuencia, el modelo demuestra que la composición de correspondencias óptimas posee una naturaleza dinámica que trasciende la simple concatenación de datos, sentando las bases conceptuales para auditar la estabilidad estructural y la conservación de información en sistemas avanzados de representación e inteligencia artificial.

7. Referencias

Bodnar, C., Di Giovanni, F., Chamberlain, B. P., Liò, P., & Bronstein, M. M. (2022). Neural sheaf diffusion: A topological perspective on heterophily and oversmoothing in GNNs. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, (Vol. 35). https://papers.neurips.cc/paper_files/paper/2022/hash/75c45fca2aa416ada062b26cc4fb7641-Abstract-Conference.html

Comisión Económica para América Latina y el Caribe. (2024a). *Agenda Digital 2024*. https://www.cepal.org/es/proyectos/agenda-digital-america-latina-caribe-elac2026/agenda-digital-2024

Comisión Económica para América Latina y el Caribe. (2024b). *Overcoming the development traps of Latin America and the Caribbean in the digital era: The transformative potential of digital technologies and artificial intelligence*. https://hdl.handle.net/11362/80841

Duan, J., Xiong, J., Li, Y., & Ding, W. (2024). Deep learning based multimodal biomedical data fusion: An overview and comparative review. *Information Fusion, 112*, Article 102536. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2024.102536

Gavranović, B., Lessard, P., Dudzik, A., von Glehn, T., Araújo, J. G. M., & Veličković, P. (2024). Position: Categorical deep learning is an algebraic theory of all architectures. In *Proceedings of the 41st International Conference on Machine Learning* (Vol. 235, pp. 15209–15241). Proceedings of Machine Learning Research. https://proceedings.mlr.press/v235/gavranovic24a.html

Huh, M., Cheung, B., Wang, T., & Isola, P. (2024). *Position: The Platonic representation hypothesis*. Proceedings of the 41st International Conference on Machine Learning. https://arxiv.org/abs/2405.07987

Li, S., & Tang, H. (2024). *Multimodal alignment and fusion: A survey* [Preprint]. arXiv. https://arxiv.org/abs/2411.17040

Liang, P. P., Zadeh, A., & Morency, L.-P. (2024). Foundations & trends in multimodal machine learning: Principles, challenges, and open questions. *ACM Computing Surveys, 56*(10). https://doi.org/10.1145/3656580

Liang, V. W., Zhang, Y., Kwon, Y., Yeung, S., & Zou, J. Y. (2022). Mind the gap: Understanding the modality gap in multi-modal contrastive representation learning. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, (Vol. 35). https://papers.neurips.cc/paper_files/paper/2022/hash/702f4db7543a7432431df588d57bc7c9-Abstract-Conference.html

Miao, F., & Holmes, W. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. https://www.unesco.org/en/articles/guidance-generative-ai-education-and-research

Moschella, L., Maiorca, V., Fumero, M., Norelli, A., Locatello, F., & Rodolà, E. (2023). Relative representations enable zero-shot latent space communication. In *The Eleventh International Conference on Learning Representations*. https://arxiv.org/abs/2209.15430

Naciones Unidas, Órgano Asesor de Alto Nivel sobre Inteligencia Artificial. (2024). *Gobernanza de la IA en beneficio de la humanidad: Informe final*. https://digitallibrary.un.org/record/4062495

Opitz, J. (2024). A closer look at classification evaluation metrics and a critical reflection of common evaluation practice. *Transactions of the Association for Computational Linguistics, 12*, 820–836. https://doi.org/10.1162/tacl_a_00675

Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea. (2024). Reglamento (UE) 2024/1689 por el que se establecen normas armonizadas en materia de inteligencia artificial. *Diario Oficial de la Unión Europea*, L. https://eur-lex.europa.eu/eli/reg/2024/1689/oj

Poklukar, P., Vasco, M., Yin, H., Melo, F. S., Paiva, A., & Kragic, D. (2022). Geometric multimodal contrastive representation learning. In *Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning* (pp. 17782–17800). https://arxiv.org/abs/2202.03390

Wang, D., Zhao, T., Yu, W., Chawla, N. V., & Jiang, M. (2023). Deep multimodal complementarity learning. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 34*(12), 10213–10224. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3165180

Warner, E., Lee, J., Hsu, W., Syeda-Mahmood, T., Kahn, C. E., Gevaert, O., & Rao, A. (2024). Multimodal machine learning in image-based and clinical biomedicine: Survey and prospects. *International Journal of Computer Vision, 132*, 3753–3769. https://doi.org/10.1007/s11263-024-02032-8

Zhao, F., Zhang, C., & Geng, B. (2024). Deep multimodal data fusion. *ACM Computing Surveys, 56*(9), Article 216. https://doi.org/10.1145/3649447

8. Declaración

Declaración	Detalle
Conflicto de intereses	Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.
Financiamiento	No existió asistencia financiera de partes externas para la elaboración del presente artículo ni de su aplicación cultural.
Derechos de autor (copyrigth)	Los autores son los titulares de los derechos de autor (patrimoniales y/o de explotación) de los contenidos de la revista (*copyright*).
Agradecimiento	
Nota	El artículo es producto de los trabajos previos del autor: Recognition Geometry I: Maximum Compatible Matchings Induce

a Pseudometric on Uniform Linear Histories y Spectral Protection and the Geometry of Recognition Polytopes.

9. Indexación , visibilidad y adhesiones